Ueber einige

Eigenschaften der Kettenbrüche.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

C. E. Hölting
aus Einbeck.

Rostock.
Carl Boldt's Buchdruckerei.
1872.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0262

Bekanntlich nennt man einen Kettenbruch eine Zahl, die zusammengesetzt ist aus einer ganzen Zahl und aus einem ächten Bruche, dessen Nenner wiederum eine ganze Zahl und einen ächten Bruch enthält mit einem Nenner, der wiederum aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch besteht 2c. 2c., der also die Formel hat:

$$a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdot \cdot \cdot}}}}$$

Die Größe a kann hier selbstverständlich auch möglicherweise verschwinden; niemals darf dies aber bei den Größen a_1, a_2, ..., b_1, b_2 . . . . geschehen. Von letzteren heißen die Größen a_1, a_2 . . . Theilnenner, während die Größen b_1, b_2 . . . die Namen Theilzähler führen.

Die Ausdrücke:

$$a + \frac{b_1}{a_1}, \quad a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}, \quad a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}}, \quad \ldots$$

nennt man Theilglieder des Kettenbruchs und durch eine beliebige Anzahl solcher einzelnen Glieder können wir den Werth des Kettenbruches mehr oder weniger genau annäherungsweise bestimmen. Die dabei gefundenen Werthe heißen „Näherungswerthe des Kettenbruches."

Es wird also a oder $\frac{a}{1}$ der erste, $a + \frac{b_1}{a_1}$ der zweite, $a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}$ der dritte ꝛc. ꝛc. Näherungswerth sein, welche wir der Kürze halber bezeichnen wollen, den ersten mit $\frac{B_1}{A_1}$, den zweiten mit $\frac{B_2}{A_2}$, den dritten mit $\frac{B_3}{A_3}$ ꝛc. ꝛc.

Theilweise weil die ersten elementaren Sätze zu bekannt sind, theilweise um eher zu dem Gegenstande zu kommen, der mir eigentlich vor Augen schwebt, will ich nicht näher eingehen z. B. auf die Art und Weise, wie man Zähler und Nenner jedes Näherungswerthes mittelst der vorhergehenden Näherungswerthe findet, oder auf den Lehrsatz, daß der wahre Werth eines Kettenbruches der Größe nach zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen liegt, und zwar dem letzten näher als dem vorletzten ꝛc., und speciell nur das näher berühren, worauf ich mich etwa später berufen muß.

Hier tritt zunächst der Satz an uns heran:

Die Wurzel jeder quadratischen Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, läßt sich in einen Kettenbruch entwickeln.

Sei uns die quadratische Gleichung

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$$

vorgelegt, so setzen wir von derselben voraus, daß ihre Wurzeln erstens nicht imaginär, sondern reell, und zweitens nicht rational, sondern irrational sind. Denn wären dieselben imaginär, so könnten wir sie überhaupt nicht in Gestalt eines Kettenbruches wiedergeben, und wären sie rational, so hätten wir einen gewöhnlichen Bruch, den zu entwickeln keine Schwierigkeit macht, der also auch nicht Gegenstand einer besondern Aufgabe sein kann.

Obige quadratische Gleichung aufgelöst giebt:

$$x = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} - \beta}{\alpha}.$$

In diesem Ausdrucke darf also erstens $\beta^2 - \alpha\gamma$ nicht negativ sein, weil eben sonst die Quadratwurzel imaginär würde, und zweitens haben wir bei demselben auf das Vorzeichen zu achten.

Der Fall, daß der obige Ausdruck für x positiv ist, bedarf keiner besonderen Erwähnung, wohl aber der, daß derselbe negativ wird. Das Verfahren ist aber auch dann sehr einfach, denn um nicht die Unannehmlichkeit zu haben, den negativen Werth von $+ x$ zu entwickeln, entwickeln wir einfach den positiven Werth von $- x$ und haben es somit also in jedem Falle nur mit einem positiven Ausdrucke zu thun. Es ist also:

$$x = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} - \beta}{\alpha}$$

etwas Positives, folglich, wenn wir $\beta^2 - \alpha\gamma = A$ setzen, $\frac{\sqrt{A} - \beta}{\alpha}$ gleich irgend einer ganzen Zahl, a vermehrt um einen echten Bruch $\frac{1}{x_1}$, also:

$$\frac{\sqrt{A} - \beta}{\alpha} = a + \frac{1}{x_1},$$

wobei natürlich auch $a = 0$ sein kann, wenn etwa $\frac{\sqrt{A} - \beta}{\alpha}$ schon ein echter Bruch sein sollte.

Wir haben demnach gefunden:

$$x = \frac{\sqrt{A} - \beta}{\alpha} = a + \frac{1}{x_1}, \text{ folglich:}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\sqrt{A} - \beta}{\alpha} - a = \frac{\sqrt{A} - \beta - a\alpha}{\alpha},$$

$$x_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{A} - \beta - a\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{A} - (\beta + a\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha(\sqrt{A} + \beta + a\alpha)}{A - (\beta + a\alpha)^2} = \frac{\alpha(\sqrt{A} + \beta + a\alpha)}{\beta^2 - \alpha\gamma - \beta^2 - a^2\alpha^2 - 2\alpha\beta a}$$

$$= \frac{\sqrt{A} + \beta + a\alpha}{-\gamma - a^2\alpha - 2\beta a}.$$

Setzen wir nun $\beta + a\,\alpha = M_1$, $-\gamma - a^2\,\alpha - 2\,a\,\beta = N_1$, so wird $x_1 = \frac{V\,A + M_1}{N_1}$, und da $\frac{1}{x_1}$ ein echter Bruch war, so folgt $x_1 > 1$, also auch $\frac{V\,A + M_1}{N_1} > 1$, d. h. $\frac{V\,A + M_1}{N_1}$ kann kein echter Bruch, sondern muß gleich einer ganzen Zahl a_1 vermehrt um einen echten Bruch $\frac{1}{x_2}$ sein. Also wir fanden:

$$x_1 = \frac{V\,A + M_1}{N_1} = a_1 + \frac{1}{x_2}, \text{ folglich:}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{V\,A + M_1}{N_1} - a_1 = \frac{V\,A + M_1 - a_1\,N_1}{N_1}$$

$$x_2 = \frac{N_1}{V\,A + M_1 - a_1\,N_1} = \frac{N_1\,(V\,A - M_1 + a_1\,N_1)}{A - (M_1 - a_1\,N_1)^2}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} A - (M_1 - a_1\,N_1)^2 &= A - {M_1}^2 - {a_1}^2\,{N_1}^2 + 2\,a_1\,N_1\,M_1 \\ &= \beta^2 - \alpha\,\gamma - \beta^2 - a^2\,\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\,a \\ &\qquad - {a_1}^2\,{N_1}^2 + 2\,a_1\,N_1\,M_1 \\ &= -\alpha\,(\gamma + a^2\,\alpha + 2\,a\,\beta) - {a_1}^2\,{N_1}^2 \\ &\qquad + 2\,a_1\,N_1\,M_1 \\ &= \alpha\,N_1 - {a_1}^2\,{N_1}^2 + 2\,a_1\,N_1\,M_1, \end{aligned}$$

folglich:

$$x_2 = \frac{N_1\,(V\,A - M_1 + a_1\,N_1)}{N_1\,(\alpha - {a_1}^2\,N_1 + 2\,a_1\,M_1)}$$

$$= \frac{V\,A - M_1 + a_1\,N_1}{\alpha - {a_1}^2\,N_1 + 2\,a_1\,M_1} = \frac{V\,A + M_2}{N_2},$$

wenn wir $-M_1 + a_1\,N_1 = M_2$ und $\alpha - {a_1}^2\,N_1 + 2\,a_1\,M_1 = N_2$ setzen.

Nach oben aber ist $\frac{1}{x_2}$ ein echter Bruch, folglich $x_2 > 1$, folglich $\frac{V\,A + M_2}{N_2} > 1$, d. h. $\frac{V\,A + M_2}{N_2} = a_2 + \frac{1}{x_3}$ ꝛc. ꝛc.

Diese Entwicklung führen wir so weiter bis zum p.ten Theilnenner x_p. Können wir dann, falls diese Zerlegung für x_p richtig ist, nachweisen, daß dieselbe auch für $x_p + 1$ richtig sein muß, so haben wir die Allgemeingültigkeit derselben bewiesen und sind somit im Stande, die Wurzeln obiger quadratischen Gleichung in einen Kettenbruch mit unendlich vielen Gliedern zu entwickeln.

Die Zerlegung sei also richtig für:

$$x_{p-1} = \frac{\sqrt{A} + M_{p-1}}{N_{p-1}} = a_{p-1} + \frac{1}{x_p} \quad \text{und für:}$$

$$x_p = \frac{\sqrt{A} + M_p}{N_p} = a_p + \frac{1}{x_{p+1}}, \quad \text{folglich:}$$

$$\frac{\sqrt{A} + M_{p-1}}{N_{p-1}} = a_{p-1} + \frac{1}{\frac{\sqrt{A} + M_p}{N_p}}$$

$$= a_{p-1} + \frac{N_p}{\sqrt{A} + M_p}$$

$$\sqrt{A} + M_{p-1} = a_{p-1} N_{p-1} + \frac{N_p N_{p-1}}{\sqrt{A} + M_p}$$

$$\left(\sqrt{A} + M_{p-1}\right)\left(\sqrt{A} + M_p - a_{p-1} N_{p-1}\right)\left(\sqrt{A} + M_p\right)$$

$$- N_p N_{p-1} = 0$$

$$A + \sqrt{A} \cdot M_{p-1} + \sqrt{A} \cdot M_p + M_p \cdot M_{p-1} - a_{p-1} \cdot \sqrt{A} \cdot N_{p-1}$$

$$- a_{p-1} \cdot M_p \cdot N_{p-1} - N_p \cdot N_{p-1} = 0$$

$$\left(A + M_p \cdot M_{p-1} - a_{p-1} \cdot M_p \cdot N_{p-1} - N_p N_{p-1}\right) + \sqrt{A}\left(M_{p-1} + M_p - a_{p-1} \cdot N_{p-1}\right) = 0.$$

In der linken Seite dieses Ausdrucks muß nun jede der beiden Klammern speciell für sich gleich Null sein, da, wenn dies nicht der Fall wäre, die erste Klammer offenbar eine ganze rationale Zahl, die zweite dagegen eine ganze Zahl multiplicirt mit der irrationalen Wurzel $\sqrt{A}$ ergäbe, welche beide Summanden addirt niemals 0 geben können.

Es muß also sein:

$$M_{p-1} + M_p - a_{p-1} \cdot N_{p-1} = 0 \text{ und}$$

$$A + M_p \cdot M_{p-1} - a_{p-1} \cdot M_p N_{p-1} - N_p N_{p-1} = 0.$$

Aus ersterer Gleichung ergiebt sich:

$$a_{p-1} \cdot N_{p-1} = M_{p-1} + M_p,$$

und dies in die zweite eingesetzt:

$$A + M_p \cdot M_{p-1} - M_p\left(M_{p-1} + M_p\right) - N_p N_{p-1} = 0$$

$$A - M_p^2 - N_p \cdot N_{p-1} = 0.$$

Oben fanden wir:

$$\frac{1}{x_{p+1}} = \frac{\sqrt{A} + M_p}{N_p} - a_p = \frac{\sqrt{A} + M_p - a_p N_p}{N_p}$$

$$x_{p+1} = \frac{N_p}{\sqrt{A} + M_p - a_p N_p} = \frac{N_p\left(\sqrt{A} - M_p + a_p N_p\right)}{A - M_p^2 - a_p^2 N_p^2 + 2 a_p N_p M_p}$$

oben war: $A - M_p^2 = N_p \cdot N_{p-1}$, folglich:

$$\varkappa_{p+1} = \frac{N_p\left(\sqrt{A} - M_p + a N_p\right)}{N_p . N_{p-1} - a^2 N_p^2 + 2 a N_p M_p}$$

$$= \frac{\sqrt{A} - M_p + a N_p}{N_{p-1} - a^2 N_p + 2 a M_p},$$

und setzen wir hier $-M_p + a N_p = M_{p+1}$,

$$N_{p-1} + 2 a M_p - a^2 N_p = N_{p+1},$$

so wird:

$$\varkappa_{p+1} = \frac{\sqrt{A} + M_{p+1}}{N_{p+1}} = a_{p+1} + \frac{1}{\varkappa_{p+2}}, \text{ weil } \frac{1}{\varkappa_{p+1}}$$

ein echter Bruch, also $\varkappa_{p+1} > 1$ ist, womit unser Satz bewiesen.

Indessen läßt sich somit nicht bloß jede reelle Wurzel einer quadratischen Gleichung einfach in einen Kettenbruch entwickeln, sondern dieser Kettenbruch ist sogar stets ein periodischer.

Zum Beweise dieses höchst characteristischen Satzes theilen wir uns den ganzen Kettenbruch in zwei Theile, deren ersterer alle Glieder vom Anfange bis zum pten Theilnenner, deren anderer dagegen alle Glieder vom pten Theilnenner bis zum Ende umfaßt. Nach unserer obigen Bezeichnungsweise gilt dann für den Werth $\varkappa$ des ganzen Kettenbruchs die Gleichung $\varkappa = \frac{\sqrt{A} - \beta}{\alpha}$, dagegen für den Werth $\varkappa_p$ des zweiten Theiles desselben die Gleichung $\varkappa_p = \frac{\sqrt{A} + M_p}{N_p}$.

Hieraus aber ergiebt sich auf Grund des Gesetzes der elementaren Ausdrucksweise der Näherungswerthe sofort:

$$\varkappa = \frac{B_{p-1}\,\varkappa_p + B_{p-2}}{A_{p-1}\,\varkappa_p + A_{p-2}},$$

folglich nach Einsetzung des obigen Werthes für $\varkappa$ und $\varkappa_p$:

$$\frac{V_{A-\beta}}{\alpha} = \frac{B_{p-1}\left(\frac{V_{A+M}}{p}\right) + B_{p-2}\,N_{p}}{A_{p-1}\left(\frac{V_{A+M}}{p}\right) + A_{p-2}\,N_{p}},$$

und nach Wegschaffung der Nenner:

$$\left(V_{A-\beta}\right)\left[A_{p-1}\left(\frac{V_{A+M}}{p}\right) + A_{p-2}\,.\,N_{p}\right] = \alpha\left[B_{p-1}\left(\frac{V_{A+M}}{p}\right) + B_{p-2}\,N_{p}\right], \text{ oder:}$$

$$A_{p-1}\,.\,A_{p-1} - \beta\,A_{p-1}\,V_{A+M}\,A_{p}\,A_{p-1} - \beta\,M\,A_{p}\,A_{p-1} + A_{p-2}\,.\,N_{p}\,.\,V_{A-\beta}\,.\,A_{p-2}\,N_{p} = \alpha\,.\,B_{p-1}\,V_{A+\alpha}\,.\,B_{p-1}\,.\,M_{p}\,+\alpha\,.\,B_{p-2}\,.\,N_{p}, \text{ oder:}$$

$$\left(A_{p-1}\,.\,A_{p-1} - \beta\,M_{p}\,.\,A_{p-1} - \beta\,A_{p-2}\,.\,N_{p} - \alpha\,.\,B_{p-1}\,.\,M_{p} - \alpha\,.\,B_{p-2}\,.\,N_{p}\right) -$$

$$V_{A}\,.\left(\beta\,.\,A_{p-1} - M_{p}\,.\,A_{p-1} - A_{p-2}\,.\,N_{p} + \alpha\,B_{p-1}\right) = 0.$$

In dieser Gleichung muß nun aus demselben Grunde, der bereits oben einmal auseinander gesetzt ist, jede der beiden Klammern für sich gleich Null werden, damit die ganze linke Seite gleich Null wird, d. h. es muß sein:

$$A_{p-1}\,.\,A_{p-1} - \beta\,.\,M_{p}\,.\,A_{p-1} - \beta\,.\,A_{p-2}\,.\,N_{p} - \alpha\,B_{p-1}\,.\,M_{p} - \alpha\,B_{p-2}\,.\,N_{p} = 0$$

und:

$$\beta A_{p-1} - M_p . A_{p-1} - A_{p-2} . N_p + \alpha B_{p-1} = 0.$$

Bezeichnen wir die erste der beiden Gleichungen mit 1), die zweite mit 2). In Gleichung 1) substituiren wir den Werth: $A = \beta^2 - \alpha\gamma$ und erhalten die Gleichung 3)

$$A_{p-1} . \beta^2 - A_{p-1} . \alpha\gamma - \beta M_p . A_{p-1} - \beta A_{p-2} . N_p - \alpha B_{p-1}$$
$$M_p - \alpha B_{p-2} . N_p = 0.$$

Gleichung 2) multipliciren wir mit β:

$$\beta^2 . A_{p-1} - M_p A_{p-1} . \beta - A_{p-2} . N_p . \beta + \alpha\beta B_{p-1} = 0,$$

diese subtrahiren wir von 3):

$$A_{p-1} \beta^2 - \beta^2 . A_{p-1} - A_{p-1} . \alpha\gamma - B_{p-1} . \alpha\beta - \beta M_p A_{p-1} +$$
$$\beta M_p A_{p-1} - \beta A_{p-2} . N_p + \beta A_{p-2} . N_p - \alpha B_{p-1} . M_p -$$
$$\alpha B_{p-2} . N_p = 0,$$

oder:

$$- A_{p-1} . \alpha\gamma - B_{p-1} . \alpha\beta - \alpha B_{p-1} . M_p - \alpha B_{p-2} . N_p = 0;$$

diese Gleichung durch $-\alpha$ dividirt:

$$A_{p-1} . \gamma + B_{p-1} . \beta + B_{p-1} . M_p + B_{p-2} . N_p = 0,$$

oder Gleichung 4):

$$A_{p-1} . \gamma + B_{p-1} . \beta = - B_{p-1} . M_p - B_{p-2} . N_p .$$

Aus Gleichung 2) folgt Gleichung 5):

$$\beta A_{p-1} + \alpha B_{p-1} = M_p . A_{p-1} + N_p . A_{p-2};$$

multipliciren wir Gleichung 4) mit A_{p-1}, Gleichung 5) mit B_{p-1}, so gehen diese beiden Gleichungen über in:

$$A^2_{p-1} \cdot \gamma + A_{p-1} \cdot B_{p-1} \cdot \beta = -A_{p-1} \cdot B_{p-1} \cdot M_p - A_{p-1} \cdot B_{p-2} \cdot N_p ,$$

und:

$$A_{p-1} \cdot B_{p-1} \cdot \beta + B^2_{p-1} \cdot \alpha = A_{p-1} \cdot B_{p-1} \cdot M_p + A_{p-2} \cdot B_{p-1} \cdot N_p ;$$

addiren wir nun diese beiden Gleichungen, so erhalten wir Gleichung 6):

$$A^2_{p-1} \cdot \gamma + 2\, A_{p-1} \cdot B_{p-1} \cdot \beta + B^2_{p-1} \cdot \alpha = N_p$$

$$\left(A_{p-2} \cdot B_{p-1} - A_{p-1} \cdot B_{p-2} \right).$$

Nun erfüllen ja aber je zwei auf einander folgende Näherungswerthe $\frac{B_{p-2}}{A_{p-2}}$ und $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}$ die bekannte Eigenschaft, daß:

$$B_{p-1} \cdot A_{p-2} - B_{p-2} \cdot A_{p-1} = (-1)^{p-2} \text{ oder } = (-1)^p \text{ ist,}$$

da $(-1)^{p-2} = (-1)^{p-2} \cdot 1 = (-1)^{p-2} \cdot (-1)^2 =$

$(-1)^p$ ist,

folglich geht unsere Gleichung 6) über in:

$$A^2_{p-1} \cdot \gamma + 2\, A_{p-1} \cdot B_{p-1} \cdot \beta + B^2_{p-1} \cdot \alpha = (-1)^p \cdot N_p ,$$

oder wenn wir letztere durch A^2_{p-1} dividiren, in Gleichung 7):

$$\gamma + 2\, \frac{B_{p-1}}{A_{p-1}} \cdot \beta + \frac{B^2_{p-1}}{A^2_{p-1}} \cdot \alpha = (-1)^p \cdot \frac{N_p}{A^2_{p-1}} ,$$

und da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth des p gilt,

dürfen wir auch den Index p um eine Einheit vermehren und erhalten Gleichung 8):

$$\gamma + 2\,\frac{B_p}{A_p}\cdot\beta + \frac{B_p^2}{A_p^2}\cdot\alpha = (-1)^{p+1}\cdot\frac{N_{p+1}}{A_p^2}\,.$$

Wie vorhin $\frac{B_{p-2}}{A_{p-2}}$ und $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}$, so sind auch jetzt $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}$ und $\frac{B_p}{A_p}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe des Kettenbruchs oder der Wurzel x der quadratischen Gleichung: $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, und zwar kommen diese Näherungswerthe bekanntlich dem wahren Werthe des x immer näher und näher. Wählen wir daher den Index p so groß, daß diese Näherungswerthe $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}$ und $\frac{B_p}{A_p}$ dem wahren Werthe x sehr nahe kommen, so müssen auch die linken Seiten der obigen Gleichungen 7) und 8), folglich auch deren rechte Seiten der 0 unendlich nahe kommen. Nun sind die Näherungswerthe abwechselnd größer und kleiner als der wahre Werth; nehmen wir aber an, daß x' und x'' die beiden Werthe seien, welche die Funktion $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ zu Null machen, so läßt sich bekanntlich obige Funktion umsetzen in die Form $\alpha(x - x')(x - x'')$ und substituiren wir hierin für x zwei Werthe $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}$ und $\frac{B_p}{A_p}$, von denen der eine größer, der andere kleiner als x' resp. x'' ist, so resultiren aus obiger Funktion in Folge beider Substitutionen zwei Werthe, welche beide, wie eine leichte Betrachtung zeigt, entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen. Wählen wir also p so groß, daß $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}$ und $\frac{B_p}{A_p}$ dem wahren Werthe von x sehr nahe kommen, so müssen hiernach die resp. Werthe der linken Seiten obiger Gleichungen 7) und 8) entgegengesetzte Vorzeichen haben; alsdann müssen aber auch die rechten Seiten derselben die gleiche Bedingung erfüllen, d. h.

von den beiden Ausdrücken

$$\left(-1\right)^{p} \cdot \frac{N_{p}}{A^{2}_{p-1}} \text{ und } \left(-1\right)^{p+1} \cdot \frac{N_{p+1}}{A^{2}_{p}}$$

muß der eine positiv, der andere negativ sein.

In denselben sind aber die Nenner als Quadrate entschieden positiv, die Verschiedenheit der Vorzeichen kann also nur in den Zählern beruhen, und da in den Zählern die Factoren $\left(-1\right)^{p}$ und $\left(-1\right)^{p+1}$ entschieden entgegengesetzte Vorzeichen haben, so müssen somit die beiden anderen Factoren N_{p} und N_{p+1} von gleichen Vorzeichen sein.

Was für N_{p} und N_{p+1} gilt, gilt ebenso auch für N_{p-1} und N_{p}, folglich ist das Product $N_{p-1} \cdot N_{p}$ jedenfalls positiv, und da wir oben pag. 8 fanden:

$$A - M^{2}_{p} = N_{p-1} \cdot N_{p},$$

so muß somit $A - M^{2}_{p}$ positiv, d. h. $A > M^{2}_{p}$ oder $M_{p} < \sqrt{A}$ sein.

Ganz analog ist dann auch $M_{p-1} < \sqrt{A}$.

Ebenso ist nach oben pag. 8:

$M_{p-1} + M_{p} = a_{p-1} \cdot N_{p}$, und da $M_{p-1} + M_{p} < 2\sqrt{A}$ ist, so muß auch $a_{p-1} \cdot N_{p} < 2\sqrt{A}$ sein.

Nun ist ja a_{p-1} ein Theilnenner, folglich mindestens gleich 1, folglich um so mehr $N_{p-1} < 2\sqrt{A}$, und ebenso auch $N_{p} < 2\sqrt{A}$.

Wir haben also gefunden $M_p < \sqrt{A}$, $N_p < 2\sqrt{A}$, ein Resultat, auf welches wir nachher wieder zurückkommen werden.

Ferner war oben pag. 9: $\varkappa_p = \dfrac{\sqrt{A} + M_p}{N_p}$, worin $\sqrt{A}$ selbst positiv, $M_p < \sqrt{A}$, der ganze Bruch aber positiv sein mußte, da $\varkappa_p > 1$ ist.

Hieraus folgt nun unmittelbar, daß N_p positiv sein muß. Allein auch M_p muß positiv sein, denn aus der letzten Gleichung:

$$\varkappa_p = \frac{\sqrt{A} + M_p}{N_p} \text{ folgt: } \varkappa_p = \frac{A - M_p^2}{N_p\left(\sqrt{A} - M_p\right)},$$

nach oben ist: $A - M_p^2 = N_{p-1} \, . \, N_p$,

folglich: $\varkappa_p = \dfrac{N_{p-1} \, . \, N_p}{N_p\left(\sqrt{A} - M_p\right)} = \dfrac{N_{p-1}}{\sqrt{A} - M_p}$, oder:

$N_{p-1} = \varkappa_p\left(\sqrt{A} - M_p\right) = \varkappa_p \sqrt{A} - \varkappa_p M_p$ und mit a_{p-1} multiplicirt:

$$a_{p-1} \, . \, N_{p-1} = a_{p-1} \, . \, \varkappa_p \, . \, \sqrt{A} - a_{p-1} \, . \, \varkappa_p \, . \, M_p \, .$$

Oben war: $a_{p-1} \, . \, N_{p-1} = M_p + M_{p-1}$, folglich:

$$M_p + M_{p-1} = a_{p-1} \, \varkappa_p \, . \sqrt{A} - a_{p-1} \, . \, \varkappa_p \, . \, M_p, \text{ oder:}$$

$$M_p + a_{p-1} \, . \, \varkappa_p \, . \, M_p = a_{p-1} \, . \, \varkappa_p \, . \sqrt{A} - M_{p-1}$$

$$M_p\left(1 + a_{p-1\,p}\,.\,x\right) = a_{p-1\,p}\,.\,x\,.\,VA - M_{p-1}$$
$$= a_{p-1\,p}\,.\,x\,.\,VA - M_{p-1} + VA - VA$$
$$= VA\left(a_{p-1\,p}\,.\,x - 1\right) - M_{p-1} + VA.$$

Nun ist $M_{p-1} < VA$, also $-M_{p-1} + VA$ positiv, ferner a_{p-1} mindestens gleich 1, also $a_{p-1} \geq 1$, $x_p > 1$, folglich: $a_{p-1}\,.\,x_p - 1$ positiv, folglich auch die rechte Seite obiger Gleichung $VA\left(a_{p-1\,p}\,.\,x_p - 1\right) - M_{p-1} + VA$ jedenfalls positiv, folglich auch die linke Seite $M_p\left(1 + a_{p-1\,p}\,.\,x_p\right)$ positiv, und da nach unseren eben angestellten Betrachtungen der zweite Faktor $1 + a_{p-1\,p}\,.\,x_p$ entschieden positiv sein muß, so muß es auch M_p sein, folglich M_p positiv.

Wir haben also jetzt das Resultat gefunden, daß M_p und N_p von einem bestimmten Werthe des p an positiv sein müssen, und zwar nach oben $M_p < VA$, $N_p < 2\,VA$, d. h. von diesem Werthe des p an muß M_p innerhalb der Grenzen 0 und VA, und N_p innerhalb der Grenzen 0 und $2\,VA$ liegen.

Gehen wir nun aber auf die eigentlichen Werthe der Größen M und N zurück, wonach $M_1 = \beta + a\,\alpha$, $N_1 = -\gamma - 2\,a\,\beta - a^2\,\alpha$ war und die übrigen Größen M und N ganz entsprechende Werthe repräsentirten, und berücksichtigen wir, daß α, β, γ als Coefficienten unserer ursprünglichen quadratischen Gleichung ganze Zahlen sein mußten, so ergiebt sich auch sofort, daß die Größen M und N ebenfalls ganze Zahlen sein müssen,

und da sie von dem obigen bestimmten Werthe des p an positiv sind und M_p innerhalb der Grenzen 0 und $\sqrt{A}$, N_p innerhalb der Grenzen 0 und $2\sqrt{A}$ liegen muß, so kann von diesem Werthe das p an M_p offenbar nur noch soviel verschiedene Werthe haben, als ganze Zahlen zwischen 0 und $\sqrt{A}$, N_p nur noch soviel verschiedene Werthe haben, als ganze Zahlen zwischen 0 und $2\sqrt{A}$ liegen.

Nennen wir von diesem bestimmten Werthe das p an η die Anzahl aller für M_p, ζ die Anzahl aller für N_p möglichen Werthe, so müssen sich nach mehr als η Werthen des p die Werthe des M_p, nach mehr als ζ Werthen des p die Werthe des N_p, nach mehr als $\eta \cdot \zeta$ Werthen des p die Werthe des M_p und N_p gleichzeitig wiederholen und von diesem Augenblick an beginnt die Periode des Kettenbruchs.

Entwickeln wir hiernach z. B. $\sqrt{35}$ und $\sqrt{77}$ in einen Kettenbruch, so finden wir:

$$\sqrt{35} = 5 + \frac{1}{x_1}, \quad \frac{1}{x_1} = \sqrt{35} - 5, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{35} - 5} =$$

$$\frac{\sqrt{35} + 5}{10} = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{35} + 5 - 10}{10}, \quad x_2 =$$

$$\frac{10}{\sqrt{35} - 5} = \frac{10(\sqrt{35} + 5)}{10} = \sqrt{35} + 5 = 10 + \frac{1}{x_3},$$

$$\frac{1}{x_3} = \sqrt{35} - 5 = \frac{1}{x_1}, \text{ ꝛc. ꝛc., folglich:}$$

$$\sqrt{35} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cdots}}}}$$

oder:

$$\sqrt{77} = 8 + \frac{1}{x_1}, \quad \frac{1}{x_1} = \sqrt{77} - 8, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{77} - 8} =$$

$$\frac{\sqrt{77}+8}{13} = 1 + \frac{1}{x_2},\quad \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{77}-5}{13},\quad x_2 = \frac{13}{\sqrt{77}-5} = \frac{13(\sqrt{77}+5)}{52} = \frac{\sqrt{77}+5}{4} = 3 + \frac{1}{x_3},$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{\sqrt{77}-7}{4},\quad x_3 = \frac{4}{\sqrt{77}-7} = \frac{4(\sqrt{77}+7)}{28} = \frac{\sqrt{77}+7}{7} = 2 + \frac{1}{x_4},\quad \frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt{77}-7}{7},\quad x_4 = \frac{7}{\sqrt{77}-7} = \frac{7(\sqrt{77}+7)}{28} = \frac{\sqrt{77}+7}{4} = 3 + \frac{1}{x_5},$$

$$\frac{1}{x_5} = \frac{\sqrt{77}-5}{4},\quad x_5 = \frac{4}{\sqrt{77}-5} = \frac{4(\sqrt{77}+5)}{52} = \frac{\sqrt{77}+5}{13} = 1 + \frac{1}{x_6},\quad \frac{1}{x_6} = \frac{\sqrt{77}-8}{13},\quad x_6 = \frac{13}{\sqrt{77}-8} = \frac{13(\sqrt{77}+8)}{13} = \sqrt{77}+8 = 16 + \frac{1}{x_7},$$

$$\frac{1}{x_7} = \sqrt{77}-8 = \frac{1}{x_1},$$ ꝛc. ꝛc. ꝛc., folglich:

$$\sqrt{77} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cdots}}}}}}}}}}}$$

Somit haben wir alſo nachgewieſen, daß erſtens jede reelle irrationale Wurzel einer quadratiſchen Gleichung ſich in einen Kettenbruch entwickeln läßt und ſodann, daß dieſer Ketten-

bruch sogar ein periodischer ist. Selbstverständlich sind alle diese Kettenbrüche in der Anzahl der Glieder ihrer Perioden sehr verschieden unter einander, wie schon unsere beiden eben entwickelten Kettenbrüche zeigen, von denen die Periode des erstern zweigliedrig, die des letztern sechsgliedrig ist.

Allein ein merkwürdiges Verhalten zeigen die Theilnenner mehrerer dieser Perioden, deren Gliederzahl eine nicht zu große ist.

Allerdings sind diese Eigenschaften bereits in einer Arbeit von R. Müller in Grunert's Archiv, Theil 6. pag. 151. entwickelt; allein ich erkläre, daß ich diese Arbeit nicht kannte, als ich mir die Untersuchung der Kettenbrüche zu demselben Zwecke zum Vorwurf machte, und daß daher der von mir eingeschlagene Weg mein völliges geistiges Eigenthum ist, was auch aus mehreren Specialitäten hervorgehen wird, die man bei Vergleichung in der erwähnten Arbeit nicht enthalten finden wird.

Ich wurde auf diese Eigenschaften durch empirische Betrachtung und Entwicklung einer Reihe von Kettenbrüchen aufmerksam.

Sei uns also ein periodischer Kettenbruch vorgelegt und zwar ein rein periodischer, d. h. ein solcher, dessen Periode gleich mit dem ersten Theilnenner beginnt; er heiße, wenn wir von den etwa noch vorhandenen Ganzen abstrahiren:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{p-1} + \cfrac{1}{a_p + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}}$$

seine Periode bestehe also aus p Gliedern, deren Theilnenner resp. $a_1, a_2, \ldots a_p$ seien.

Der Kettenbruch habe den wahren Werth x. Die Anzahl seiner Perioden ist unendlich, mithin wird sein wahrer Werth nicht verändert, wenn wir auch die erste seiner Perioden weglassen, da wir ja an seinem Ende ganz beliebig viele folgen lassen können.

Obiger Kettenbruch ist somit gleich:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \cfrac{1}{a_p + x}}}$$

, und da sein wahrer Werth x ist, so ist:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \cfrac{1}{a_p + x}}} .$$

Jetzt ist dieser Kettenbruch erst faßbar, untersuchbar, was unmöglich war, solange er kein Ende hatte. Er hat offenbar p Näherungswerthe, deren drei letzte nach unserer Bezeichnungsweise heißen:

$$\frac{B_{p-2}}{A_{p-2}}, \quad \frac{B_{p-1}}{A_{p-1}} \text{ und } \frac{B_p}{A_p} .$$

Für den Werth des $\frac{B_p}{A_p}$ gilt bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{B_p}{A_p} = \frac{a_p . B_{p-1} + B_{p-2}}{a_p . A_{p-1} + A_{p-2}}$$, und aus der letzten Form des Kettenbruchs geht sofort hervor, daß dieser letzte Näherungswerth desselben in den wahren Werth x übergeht, wenn wir $a_p + x$ für a_p substituiren.

Alsdann ist:

$$x = \frac{(a_p + x) . B_{p-1} + B_{p-2}}{(a_p + x) . A_{p-1} + A_{p-2}}$$ oder:

$$x (a_p . A_{p-1} + x . A_{p-1} + A_{p-2}) = a_p B_{p-1} + x . B_{p-1} + B_{p-2}$$

$$x^2 . A_{p-1} + x . A_{p-2} + x . a_p . A_{p-1} - x . B_{p-1} = a_p B_{p-1} + B_{p-2}$$

$$x^2 . A_{p-1} + x (A_{p-2} + a_p A_{p-1} - B_{p-1}) = a_p B_{p-1} + B_{p-2}$$

ferner ist $a_p B_{p-1} + B_{p-2} = B_p$, folglich:

$$x^2 A_{p-1} + x (A_{p-2} + a_p A_{p-1} - B_{p-1}) = B_p$$

$$x^2 + x . \frac{a_p . A_{p-1} + A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}} = \frac{B_p}{A_{p-1}}$$

$$x^2 + x \left(a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}} \right) = \frac{B_p}{A_{p-1}} .$$

Aus dieser quadratischen Gleichung ergeben sich für x

zwei Werthe von der Form: $x_1 = -h + V\,i$ und $x_2 = -h - V\,i$, worin h und i ganze positive Zahlen bezeichnen; folglich: $x_1 + x_2 = -2h$, und da die Summe der beiden Wurzeln jeder quadratischen Gleichung gleich dem negativ genommenen Coefficienten von x ist, so folgt:

$$-2h = -\left(a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}}\right).$$

Ebenso ist: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{B_p}{A_{p-1}}$, folglich:

$$(-h + V\,i)(-h - V\,i) = -\frac{B_p}{A_{p-1}},$$

$$h^2 - i = -\frac{B_p}{A_{p-1}}.$$

Mit Hülfe dieser beiden Resultate:

$$x_1 + x_2 = -2h = -\left(a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}}\right)$$

und:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{B_p}{A_{p-1}} = h^2 - i$$

sind wir leicht im Stande, für mehrere Kettenbrüche, deren Periode nicht zu vielgliedrig ist, einige Eigenschaften ihrer Theilnenner zu entwickeln. h und i sind ganze Zahlen, folglich auch 2 h, folglich auch $a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}}$; a als

Theilnenner ist aber ganz, folglich muß es auch $\frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}}$ sein. In letzterem Ausdrucke sind aber A_{p-2}, A_{p-1}, B_{p-1} einzeln ganze Zahlen als Nenner resp. Zähler von Näherungswerthen, mithin muß auch $A_{p-2} - B_{p-1}$ ganz sein; von dieser Differenz muß also A_{p-1} ein Theiler sein. A_{p-1} ist aber $> A_{p-2}$, weil beide Größen Nenner zweier auf einander folgender Näherungswerthe sind, folglich um so mehr: $A_{p-1} > A_{p-2} - B_{p-1}$; folglich kann A_{p-1} nur dann ein Theiler von $A_{p-2} - B_{p-1}$ sein, wenn $A_{p-2} - B_{p-1} = 0$ ist; mithin muß $A_{p-2} = B_{p-1}$ sein.

Ferner ist 2 h stets eine gerade Zahl, folglich muß auch

$$a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}} = a_p \text{ gerade sein.}$$

Außerdem muß, da h und i ganz sind, auch $h^2 - i$ ganz sein, folglich auch $\frac{B_p}{A_{p-1}}$, d. h. A_{p-1} muß ein Theiler von B_p sein.

Halten wir diese drei Resultate fest.

Ist die Periode zweigliedrig, hat also der Kettenbruch die Form:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}}}$$

so ist $\frac{B_p}{A_p} = \frac{a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1}$, $\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}} = \frac{1}{a_1}$, und es muß also nach dem oben Gefundenen $A_{p-1} = a_1$ ein Theiler von $B_p = a_2$ sein.

Bei jeder zweigliedrigen Periode ist also der erste Theilnenner ein Theiler des zweiten.

Wir finden das Gesetz auch in der That an dem obigen Kettenbruch für $V\,35$ oder auch für $V\,38$, $V\,39$ ꝛc. bestätigt.

Außerdem muß nach oben $a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}}$ gerade sein. Nun ist bei unserm zweigliedrig periodischen Kettenbruche $a_p = a_2$, $B_{p-1} = 1$, $A_{p-1} = a_1$; in Wahrheit hat er nur 2 Näherungswerthe; da aber, weil a_2 ganz ist, auch $\frac{A_{p-2} - 1}{a_1}$ ganz sein muß und da A_{p-2} als Nenner des vorhergehenden Näherungswerthes kleiner sein muß als a_1, so muß somit bei allen, auch den zweigliedrigen Kettenbrüchen, als allererster Näherungsbruch ein solcher gesetzt werden, dessen Nenner 1 ist.

Sein Zähler ergiebt sich hiernach leicht als 0. Also $A_{p-2} = 1$, folglich $a_p + \frac{A_{p-2} - B_{p-1}}{A_{p-1}}$ in diesem Falle gleich a_2, mithin muß der zweite Theilnenner eines zweigliedrig periodischen Kettenbruches gerade sein.

Ist die Periode dreigliedrig, also der Kettenbruch von der Form:

$$\varkappa = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots}}}}$$

so ist

$$\frac{B_p}{A_p} = \frac{a_2\, a_3 + 1}{a_1\, a_2\, a_3 + a_1 + a_3}, \quad \frac{B_{p-1}}{A_{p-1}} = \frac{a_2}{a_1\, a_2 + 1},$$

$$\frac{B_{p-2}}{A_{p-2}} = \frac{1}{a_1}$$, folglich muß die Größe $A_{p-2} = a_1$ gleich sein der Größe $B_{p-1} = a_2$; ferner muß $A_{p-1} = a_1\, a_2 + 1 = a_2^2 + 1$ ein Theiler sein von $B_p = a_2\, a_3 + 1$.

Bei jeder dreigliedrigen Periode sind die beiden ersten Theilnenner einander gleich; das um 1 vermehrte Produkt der beiden ungleichen Theilnenner ist ferner ein Vielfaches des um 1 vermehrten Quadrats des zweimal vorkommenden Theilnenners.

Auch hier muß ja nun $a_3 + \frac{A_1 - B_2}{A_2}$ gerade sein;

A_1 ist aber offenbar $= a_1$, $B_2 = a_2$, $A_2 = a_1\,a_2 + 1$, folglich muß $a_3 + \frac{a_1 - a_2}{a_1\,a_2 + 1} = a_3$ gerade sein, da nach oben $a_1 = a_2$ ist. Nach oben muß also $\frac{a_2\,a_3 + 1}{a_2{}^2 + 1}$ eine ganze Zahl sein; eben haben wir gefunden, daß a_3 gerade ist, folglich ist $a_2 \,.\, a_3 + 1$ ungerade, folglich auch $a_2{}^2 + 1$ ungerade, $a_2{}^2$ gerade, also auch a_2 gerade.

Beide verschiedenen Theilnenner einer dreigliedrigen Periode sind also gerade Zahlen.

Ist der Kettenbruch in seiner Periode viergliedrig, also von der Form:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots}}}}}$$

so ist sofort:

$$\frac{B_p}{A_p} = \frac{B_4}{A_4} = \frac{a_2\,a_3\,a_4 + a_2 + a_4}{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}$$

$$\frac{B_{p-1}}{A_{p-1}} = \frac{B_3}{A_3} = \frac{a_2\,a_3 + 1}{a_1\,a_2\,a_3 + a_1 + a_3}$$

$$\frac{B_{p-2}}{A_{p-2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{a_2}{a_1\,a_2 + 1}$$

$$\frac{B_{p-3}}{A_{p-3}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{a_1};$$

ferner aber nach oben:

$$A_{p-2} = B_{p-1}, \text{ folglich: } a_1 a_2 + 1 = a_2 a_3 + 1,$$
$$a_1 a_2 = a_2 a_3,$$
$$a_1 = a_3.$$

Hiernach ist also in jeder viergliedrigen Periode der erste Theilnenner gleich dem dritten.

$a = a_4$ muß ferner nach oben stets eine gerade Zahl sein. Dasselbe gilt auch für $\frac{B_4}{A_3}$, also hier für $\frac{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}$. Es ist aber nach den oben gefundenen Resultaten:

$$\frac{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} = \frac{a_1 a_2 a_4 + a_4 + a_2}{a_1^2 . a_2 + 2 a_1}$$
$$= \frac{a_1 a_2 a_4 + 2 a_4 + a_2 - a_4}{a_1^2 . a_2 + 2 a_1}$$
$$= \frac{a_4 (a_1 a_2 + 2) + a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)}$$
$$= \frac{a_4 (a_1 a_2 + 2)}{a_1 (a_1 a_2 + 2)} + \frac{a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)}$$
$$= \frac{a_4}{a_1} + \frac{a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)}.$$

Nun sind a_1, a_2 und a_4 positive ganze Zahlen, folglich $a_2 - a_4 < a_2$; ferner a_1 mindestens gleich 1, folglich $a_1 (a_1 a_2 + 2)$ mindestens gleich $a_2 + 2$.

Hier haben wir nun zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden, ob $a_2 > a_4$ oder $a_2 < a_4$ ist.

Im ersteren Falle ist nach dem oben Gesagten $\frac{a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)}$ ein echter Bruch, folglich muß auch $\frac{a_4}{a_1}$ ein Bruch oder eine gemischte Zahl sein.

Nun ist aber a_4 ganz und gerade, folglich darf dann bereits a_1 weder 1 noch 2 sein.

Sei also $\frac{a_4}{a_1} = b + \frac{x}{a_1}$, worin b und x positive ganze

Zahlen bezeichnen, von denen b möglicherweise auch gleich Null und x jedenfalls kleiner als a_1 ist. Alsdann muß $\frac{x}{a_1} + \frac{a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)}$ unbedingt eine ganze Zahl sein. Es ist aber:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)} = \frac{a_1 a_2 x + 2x + a_2 - a_4}{a_1 (a_1 a_2 + 2)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 x + a_2 - a_4 + 2x}{a_1^2 a_2 + 2 a_1};$$

ferner ist x höchstens gleich $a_1 - 1$, folglich: $a_1 a_2 x + a_2 - a_4 + 2x$ höchstens $= a_1^2 a_2 - a_1 a_2 + a_2 - a_4 + 2 a_1 - 2$

$$= a_1^2 a_2 + 2 a_1 - [a_2 (a_1 - 1) + a_4 + 2],$$

und da wir vorher gefunden, daß a_1 weder 1 noch 2, mindestens also 3 sein muß, da ferner a_4 mindestens 1, a_2 aber $> a_4$, also mindestens 2 sein muß, so ist $a_2 (a_1 - 1)$ positiv ganz, um so mehr $a_2 (a_1 - 1) + a_4 + 2$ positiv ganz und somit $a_1^2 a_2 + 2 a_1 - [a_2 (a_1 - 1) + a_4 + 2]$ jedenfalls kleiner als $a_1^2 a_2 + 2 a_1$.

In dem obigen Bruche $\frac{a_1 a_2 x + a_2 - a_4 + 2x}{a_1^2 a_2 + 2 a_1}$ ist also selbst bei dem höchsten Werthe, den x haben kann, der Zähler immer noch kleiner als der Nenner, folglich kann der Bruch niemals gleich einer ganzen Zahl sein und daraus ergiebt sich bei schrittweisem Rückwärtsgehen, daß niemals $a_2 > a_4$ sein kann.

Ist also die Periode eines Kettenbruchs viergliedrig, so ist erstens der erste Theilnenner stets gleich dem dritten und der zweite stets kleiner als der vierte.

Für den Fall, daß $a_1 = 1$, ergiebt sich aus oben:

$$\frac{a_1 a_2 a_4 + a_4 + a_2}{a_1^2 a_2 + 2 a_1} = \frac{a_2 a_4 + a_4 + a_2}{a_2 + 2} = \frac{a_2 a_4 + 2 a_4 - a_4 + a_2}{a_2 + 2}$$

$$= \frac{a_4 (a_2 + 2)}{a_2 + 2} - \frac{a_4 - a_2}{a_2 + 2} = a_4 - \frac{a_4 - a_2}{a_2 + 2},$$

folglich muß $\frac{a_4 - a_2}{a_2 + 2}$ eine ganze Zahl sein.

Ein Beispiel dazu ist $\sqrt{248}$ in einen Kettenbuch entwickelt:

$$\sqrt{248} = 15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Für den Fall, daß $a_1 = 2$, ergiebt sich:

$$\frac{a_1\, a_2\, a_4 + a_4 + a_2}{a_1^{\,2}\, a_2 + 2\, a_1} = \frac{2\, a_2\, a_4 + a_4 + a_2}{4\, a_2 + 4}$$

$$= \frac{2\, a_2\, a_4 + 2\, a_4 - a_4 + a_2}{4\, a_2 + 4} = \frac{2\, a_4\, (a_2 + 1)}{4\, (a_2 + 1)} - \frac{a_4 - a_2}{4\, (a_2 + 1)}$$

$$= \frac{a_4}{2} - \frac{a_4 - a_2}{4\, (a_2 + 1)};$$

a_4 ist nun nach oben eine gerade Zahl, folglich $\frac{a_4}{2}$ ganz, folglich auch $\frac{a_4 - a_2}{4\, (a_2 + 1)}$ ebenfalls ganz, und da a_4 gerade ist, ferner auch $a_4 - a_2$ durch 4 theilbar, also ebenfalls gerade ist, so muß auch a_2 gerade sein.

Ein Beispiel dazu ist $\sqrt{\frac{1044}{5}}$ in einen Kettenbruch entwickelt:

$$\sqrt{\frac{1044}{5}} = 14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{28 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$

Für andere erste Theilnenner einer viergliedrigen Periode als 1 und 2 wollte sich mir eine ähnliche einfache Relation unter allen Theilnennern nicht ergeben.